Résumé d'automatique – Représentation d'état

Auto – Résumé

I. Outils mathématiques

1. Calcul de déterminant

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \qquad \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$$

$$\begin{array}{ccc} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} e & h \\ f & i \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} b & h \\ c & i \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

2. Calcul de rang

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

3. Inversion de matrice

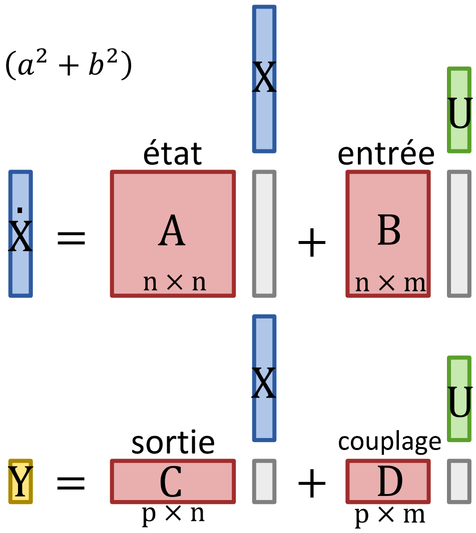
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc} \qquad A^{-1} = \frac{\operatorname{com}^T A}{\det A} \qquad (\operatorname{com} A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{-i,-j}$$

4. Autres

$$\big(s-(a+jb)\big)\big(s-(a-jb)\big) = s^2 - (2a)s + (a^2+b^2)$$

II. Modèle d'état

$$\boxed{\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}}$$



1. Changement de vecteur d'état

T : matrice carrée d'ordre n régulière

$$A_T = T^{-1}AT \qquad C_T = CT$$
$$B_T = T^{-1}B \qquad D_T = D$$

2. Linéarisation

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X,U) \\ Y = g(X,U) \end{cases} \xrightarrow[]{\substack{\text{linéarisation} \\ \text{autour de} \\ (\bar{X},\bar{U})}} \begin{cases} \dot{X} \approx F_X X + F_U U \\ Y \approx G_X X + G_U U \end{cases}$$

$$F_X = \left.\frac{\partial f}{\partial X^T}\right|_{\bar{X},\bar{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} \qquad F_U = \left.\frac{\partial f}{\partial U^T}\right|_{\bar{X},\bar{U}} \qquad G_X = \left.\frac{\partial g}{\partial X^T}\right|_{\bar{X},\bar{U}} \qquad G_U = \left.\frac{\partial g}{\partial U^T}\right|_{\bar{X},\bar{U}}$$

III. Lien fonction de transfert – modèle d'état

1. Fonction de transfert / matrice de transfert

$$Y = HU \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}} \quad (a_n = 1) \qquad H = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{U_1} & \cdots & \frac{Y_p}{U_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Y_1}{U_m} & \cdots & \frac{Y_p}{U_m} \end{bmatrix}$$

En multi-entrée

2. Forme canonique de commandabilité (A_C, B_C, C_C, D_C)

$$H = \frac{Y}{V}\frac{V}{U} \qquad U = V\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \qquad Y = V\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \quad \Rightarrow \quad X_i = s^{i-1}V \qquad \dot{X_i} = X_{i+1}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} B$$

$$Y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]X$$

3. Forme canonique d'observabilité (A_O, B_O, C_O, D_O)

$$Y = \frac{b_0 U - a_0 Y}{s^n} + \frac{b_1 U - a_1 Y}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{b_m U - a_m Y}{s^{n-m}} - \cdots - \frac{a_{n-1} Y}{s} \qquad \begin{aligned} \dot{x_1} &= b_0 u - a_0 x_n \\ \dot{x_i} &= x_{i-1} + b_{i-1} u - a_{i-1} x_n \end{aligned}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} B$$

$$Y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1]X$$

$$\begin{aligned} A_C &= A_O^T \\ B_C &= C_O^T \\ C_C &= B_O^T \\ D_C &= D_O \end{aligned}$$

4. Forme modale (A_m, B_m, C_m, D_m)

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)} \quad \Rightarrow \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{U}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \qquad X_i = \frac{U}{s - \lambda_i}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_n]X$$

Transformation du modèle par la matrice T des vecteurs propres.

Si pôles multiples, blocs de Jordon :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda_{i,i+1} = a \pm ib$, blocs de couplage :

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

IV. Commandabilité et stabilité

1. Commandabilité

(A, B) commandable si peut être amené de n'importe quel état à n'importe quel autre via U.

(Invariant par retour d'état)

$$\boxed{\begin{aligned}(A,B)\text{ commandable } &\Leftrightarrow \text{rang}\,\mathcal{C}(A,B) = n \\ &\Leftrightarrow \forall\, i, B_m(i) \neq 0\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathcal{C}(A,B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]}$$

2. Stabilité

$$\boxed{\begin{aligned}\text{système stable } &\Leftrightarrow U(t) = 0, \forall\, X(0),\ \ X(\infty) \to 0 \\ &\Leftrightarrow Re\left(\lambda_{i_A}\right) < 0\end{aligned}}$$

3. Réponse

$$X(t) = e^{At}X(0) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=0 \text{ si réponse libre}}$$

4. Stabilisation : commande par retour d'état

$$\boxed{U(t) = Sr(t) - KX(t)}$$

$$\boxed{\begin{cases}\dot{X} = (A - BK)X + BSr \\ Y = (C - DK)X + DSr\end{cases}}$$

$$\boxed{H_{BF} = SC(sI_n - A + BK)^{-1}B + D}$$

$$\boxed{K = [k_1 \ \dots \ k_n]}$$

- (A, B) commandable $\Rightarrow K$ peut placer $\lambda_{i,BF}$ arbitrairement *(à vérifier)*
- On choisi $\lambda_{i,BF} \in \text{spectre}(A - BK)$ d'après le CdC (et technique des pôles dominants)

a. Calcul direct par identification

$$\boxed{P_{BF}(s) = P_{A-BK}(s) = \det(sI - A + BK) = \prod_{i=1}^{n}\left(s - \lambda_{i,BF}\right) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i s^i}$$

b. Calcul via forme de commandabilité

Matrice de changement d'état pour la forme de commandabilité :

$$T_C = [T_{c,1} \quad \dots \quad T_{c,n}]$$

$$\begin{cases}T_{c,n} &= B \\ T_{c,n-1} &= (A + a_{n-1}I)B \\ T_{c,n-2} &= (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)B \\ \vdots & \\ T_{c,1} &= (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I)B\end{cases}$$

Solution dans l'espace de commandabilité :

$$P_{BF}(s) = P_{A_c - B_c K_c}(s) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(a_i + k_{c,i+1}\right)}_{\beta_i} s^i$$

$$\boxed{\begin{cases}k_{c,n} &= \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ k_{c,n-1} &= \beta_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots & \\ k_{c,1} &= \beta_0 - a_0\end{cases}}$$

$$\boxed{K = K_C T_C^{-1}}$$

c. Calcul avec la formule d'Ackermann

$$\boxed{K = [0 \ \dots \ 0 \ \ 1]\,\mathcal{C}(A,B)^{-1} P_{BF}(A)}$$

d. Réglage du précompensateur S et du gain statique

$$G_{BF} = \lim_{s \to 0} H_{BF} = SC(-A + BK)^{-1}B = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{C(-A + BK)^{-1}B}$$

V. Observabilité et observateurs

1. Observabilité

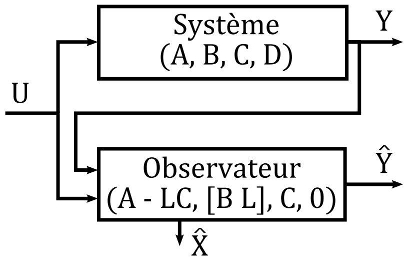
(C, A) complètement observable si la connaissance de $U(t)$ et $Y(t)$ sur $[0, t_1]$ permet de déter. $X_0 = X(0)$

$$\mathcal{O}(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (C, A) \text{ observable} &\Leftrightarrow \operatorname{rang} \mathcal{O}(C, A) = n \\ &\Leftrightarrow \forall\, i, C_m(i) \neq 0 \end{aligned}}$$

Propriétés :

- La connaissance de X_0 permet d'obtenir $X(t)\ \forall\, t$.
- $\boxed{(A, B) \text{ commandable } \Leftrightarrow (B^T, A) \text{ observable}}$



2. Observateur (capteur mathématique)

Permet d'obtenir une estimation $\hat{X}$ de X. Modèle d'état :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU + L(Y - \hat{Y}) \\ \hat{Y} = C\hat{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{X}} = \overbrace{(A - LC)}^{A_{obs}}\hat{X} + \overbrace{[B \quad L]}^{B_{obs}} \overbrace{\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}}^{U_{obs}} \\ \hat{Y} = C\hat{X} \end{cases}$$

- **Calcul de la matrice de retour de sortie L**

$\underbrace{e = X - \hat{X}}_{\text{Erreur d'estimation}}$ $\qquad \dot{e} = (A - LC)e \qquad$ $e \to 0$ dépend des $\lambda_{i,O} \in \text{spectre}(A - LC)$

- (C, A) observable $\Rightarrow$ L peut placer les $\lambda_{i,O}$ arbitrairement
- On choisi $\lambda_{i,O} \in \text{spectre}(A - LC)$ (régalement 5 × pôles plus rapide que le système)
- Même méthodes que pour K avec les changements suivants :

$A - BK$	$A - LC$
A	A^T
B	C^T
K	L^T

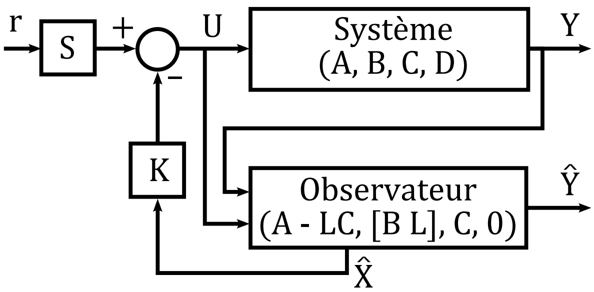
Formule d'Ackermann :

$$\boxed{L = P_{obs}(A)\mathcal{O}^{-1}(C, A) \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

VI. Système complet

$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BS \\ BS \end{bmatrix} r \\ Y \ = [C \quad 0] \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BS \\ 0 \end{bmatrix} r \\ Y \ = [C \quad 0] \begin{bmatrix} X \\ e \end{bmatrix} \end{cases}}$$



(A, B, C, D) real minimale (com & obs) $\Rightarrow$ on peut choisir L et K indep. $\lambda_\Sigma = \lambda_{BF} \cup \lambda_O$