# Théorème du moment cinétique

P2 – Chapitre 6

## I. Moment d'une force et moment cinétique

$\boxed{\mathcal{M}_O^t(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$

$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}$

$\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \sum \mathcal{M}_O^t(\vec{F})}$

$\mathcal{M}_O^t(\vec{F})$ (N.m) : moment en O de $\vec{F}$

$\overrightarrow{L_O}$ : moment cinétique

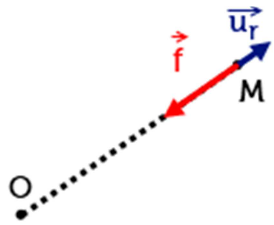
## II. Force centrale

### 1. Définition

$$\boxed{\vec{f} = f_r\,\overrightarrow{u_r}}$$

$f_r > 0 \Rightarrow$ force répulsive

$f_r < 0 \Rightarrow$ force attractive




### 2. Propriétés

- Conservation du moment cinétique $\left(\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = 0\right)$
- Le mouvement de M est plan
- Loi des aires vérifiée
- Formules de Binet

### 3. Loi des aires

Le rayon $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des durées égales

On a : $\left\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\| = 2d\mathcal{A} \Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}$ et $r^2\dot{\theta}$ constante car $\overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{cst}$

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}} \quad \boxed{\overrightarrow{L_O} = mC\overrightarrow{u_r}} \quad \boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}}$$

$$\boxed{C = r_0 v_0 sin\alpha} \quad \alpha = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_0}\right)$$

### 4. Formules de Binet

$$\boxed{u = \frac{1}{r}} \quad \boxed{\vec{v} = -C\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_r} + Cu\,\overrightarrow{u_\theta}} \quad \boxed{\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\overrightarrow{u_r}}$$

$$\underline{\dot{\theta} = Cu^2} \quad \underline{\dot{r} = -C\frac{du}{d\theta}} \quad \underline{\ddot{r} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}}$$

<u>Etapes de la démonstration :</u>

- On part de $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $C$ pour calculer $\dot{\theta}$ puis $\dot{r}$ et on remplace dans $\vec{v}$
- On part de $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$, $\vec{f}$ et $\vec{f} = m\vec{a}$, alors la composante en $\overrightarrow{u_\theta}$ de $\vec{a}$ est nulle. On calcule $\ddot{r}$ et on remplace dans $\vec{a}$.

## III. Champ de force newtonien

### 1. Définition et propriétés

$\boxed{\vec{f} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$ conservative et centrale $\boxed{\mathcal{E}_P = \frac{k}{r}}$

*Les propriétés ci-dessus sont vérifiées.*

### 2. Etude du mouvement

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{c_{radiale}}} + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} + \frac{k}{r}}_{\mathcal{E}_{p_{effective}}}}$$

Les trajectoires sont des coniques :

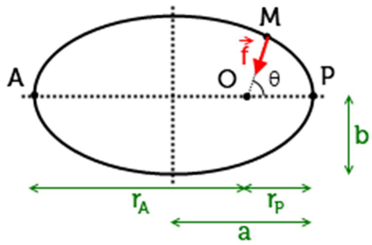
- p : paramètres de la conique
- e : excentricité de la conique

| Etat | Energie | Excentricité | Trajectoire |
|---|---|---|---|
| **Diffusion** | $\mathcal{E}_m > 0$ | $e > 1$ | Hyperbole |
| | $\mathcal{E}_m = 0$ | $e = 1$ | Parabole |
| **Lié** | $\mathcal{E}_m < 0$ | $e < 1$ | Ellipse |
| | | $e = 0$ | Cercle |

<u>Etude de l'état lié :</u>

A : Apogée
P : Périgée
a : demi-grand axe
b : demi-petit axe

$$2a = r_A + r_P$$
$$b^2 = ap$$
$$\mathcal{A}ire = \pi ab$$
$$\mathcal{E}_M = \frac{k}{2r}$$




## IV. Vitesse de libération

Vitesse minimale à fournir à un point matériel à la surface d'un astre pour qu'il échappe à son attraction.

## V. Lois de Kepler

### 1. 1ère loi de Kepler

Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le soleil est un foyer.

### 2. 2ème loi de Kepler : Loi des aires

Le rayon-vecteur $\overrightarrow{\text{Soleil} - \text{Planète}}$ ballaye des aires égales en des durées égales $\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}}$

### 3. 3ème loi de Kepler : Loi harmonique

Pour chaque planète, $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} =$ constante.